Jurnal Matematika "L O G ! K @" ISSN 1978 – 8568
Volume 8, Nomor 1, Januari 2018

Terbit dua kali setahun pada bulan Januari dan Juli. Berisi tulisan yang diangkat dari hasil pemikiran dan hasil penelitian di bidang matematika.

Alamat Penyunting dan Tata Usaha : Pusat Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Jakarta Jl. Ir. H. Juanda No. 95 Ciputat Jakarta 15412, Telepon 0818269377 atau 082118429870, Fax. (021)7493315, Email: jurnal.logika@uinjkt.ac.id. Website: mtk.fst.uinjkt.ac.id.

Jurnal Matematika Log!k@ diterbitkan sejak 1 Juli 2008 oleh Pusat Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta.

Penyunting menerima sumbangan tulisan yang belum pernah diterbitkan dalam media lain. Naskah diketik diatas kertas A4 spasi satu sebanyak 13 halaman, dengan format tercantum pada FORMAT PENULISAN NASKAH Jurnal Matematika "LOG!K@" di bagian belakang jurnal ini. Naskah yang masuk dievaluasi dan disunting untuk keseragaman format, istilah, dan penulisan lainnya.

.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahi Robbil 'Alamin dengan pertolongan Ilahi Rabbi, Jurnal Matematika LOG!K@ Volume 8 Nomor 1 dapat terbit pada Bulan Januari 2018. Sesuai dengan visi Program Studi Matematika, yakni menjadi pusat keunggulan dan pengembangan matematika maka jurnal ini hadir untuk menambah wawasan dan aplikasi dari berbagai bidang ilmu matematika. Jurnal Log!k@ diharapkan dapat menjadi wadah aspirasi dan informasi dari berbagai hasil penelitian dan hasil pemikiran dari seluruh civitas akademika UIN Syarif Hidayatullah Jakarta pada khususnya dan matematikawan Indonesia pada umumnya.

Jurnal Matematika LOG!K@ menyajikan beberapa topik yang berkaitan dengan Matematika Murni, Komputasi, Statistika, Matematika Keuangan dan Riset Operasi, dengan tidak menutup kemungkinan munculnya beberapa penelitian di bidang matematika yang lain. Beberapa bidang yang muncul dalam edisi ini antara lain dalam bidang statistika, aktuaria, graf, pemodelan dan komputasi.

Akhirulkalam, penyunting memberikan apresiasi yang tinggi kepada para penulis naskah, penyunting dan juga pelanggan yang terus berkarya dan turut menghidupkan jurnal. Secara sangat khusus, kami menyampaikan penghargaan setinggi-tingginya dan terima kasih sebesar-besarnya kepada para Penyunting Ahli atau Mitra Bestari yang kesetiaannya kepada tugas-tugas kemitrabestarian sungguh sangat mengagumkan. Mudah-mudahan peran mereka dapat semakin membesarkan Jurnal Matematika LOG!K@ di masa mendatang.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Penyunting

Jurnal Matematika "L O G ! K @" ISSN 1978 – 8568
Volume 8, Nomor 1, Januari 2018

DAFTAR ISI

.

Jurnal "LOG!K@" , Jilid 8, No. 1, 2018, Hal. 19 - 23
ISSN 1978 – 8568

RAINBOW CONNECTION NUMBER DAN *STRONG RAINBOW CONNECTION NUMBER* PADA SHACKLE GRAF ANTIPRISMA AP_4

Dayinta Andira[1], Yanne Irene[1], Irmatul Hasanah[2]
[1]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: dayinta.andira14@uinjkt.ac.id
[2]Universitas Islam Negeri Sultan Maulana Hasanuddin Banten
Email: irmatul.hasanah@uinbanten.ac.id

Abstract: Let G be a nontrivial connected graph. The minimum natural number k of k-edge coloring graph G is rainbow connection number of G, denoted by $rc(G)$. The minimum natural number k of k-edge coloring graph G to be a strongly rainbow connected graph is called strong rainbow connection number of G, denoted by $src(G)$. Shackle operation of some graphs, denoted as $Shack(AP_4, t)$, is a graph of t connected graph AP_4 such that for every $a, b \in [1, t]$ with $|a - b| \geq 2$, G_a and G_b have no common vertex, and for every $i \in [1, t-1], G_i$ and G_{i+1} have one common vertex, called linkage vertex, where all $t - 1$ linkage vertices are different. The shackle application used in this paper are the ones such that its diameter is consistent for any natural number t. Let $\cong Shack(AP_4, t)$, $rc(G) = src(G) = 2t$.
Keywords: rainbow coloring, rainbow connection number, shackle operation, antiprism graph.

Abstrak: Misal G adalah graf terhubung tak trivial. Minimum k warna sedemikian sehingga G memiliki *rainbow-* k*-coloring* merupakan *rainbow connection number*, dinotasikan dengan $rc(G)$. Minimum k warna yang dibutuhkan untuk mewarnai G menjadi *strongly rainbow connected* merupakan *strong rainbow connection number*, dinotasikan dengan $src(G)$. Operasi *shackle* $Shack(AP_4, t)$ adalah graf yang dibentuk dari sebanyak t graf AP_4 yang terhubung sehingga untuk setiap $a, b \in [1, t]$ dengan $|a - b| \geq 2$ berlaku G_a dan G_b tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, t-1], G_i$ dan G_{i+1} tepat mempunyai satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan semua $k - 1$ titik penghubung berbeda. *Shackle* yang digunakan merupakan *shackle* dengan diameter konsisten untuk setiap t bilangan asli. Misalkan $G \cong Shack(AP_4, t)$, $rc(G) = src(G) = 2t$.
Kata Kunci: rainbow coloring, rainbow connection number, operasi shackle, graf antiprisma

PENDAHULUAN

Misal G adalah graf terhubung tak trivial dengan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, , \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh diwarnai sama. Suatu lintasan $u - v$ di G merupakan *rainbow path* jika tidak ada dua atau lebih sisi dengan warna yang sama. Jika graf G memuat suatu *rainbow* $u - v$ *path* untuk setiap titik $u, v \in G$, graf G disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan c. Dalam hal ini, pewarnaan c disebut *rainbow coloring*. Jika pewarnaan c menggunakan sebanyak k warna, maka disebut *rainbow-k-coloring*. Minimum dari k yang terdapat pada *rainbow-k-coloring* pada graf G merupakan *rainbow connection number* pada graf G dan dinotasikan dengan $rc(G)$.

Misal c suatu *rainbow coloring* pada suatu graf terhubung G. Untuk sebarang titik u dan v di G, *rainbow* $u - v$ *geodesic* di G adalah *rainbow path* dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara titik u dan v. Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G mengandung satu *rainbow* $u - v$ *geodesic* untuk setiap pasang titik u dan v di G. Dalam hal ini, c dikatakan *strong rainbow coloring* dari G. Nilai minimum k dari pewarnaan sisi $c : E(G) \to \{1, 2, , \dots, k\}$ yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G menjadi *strongly rainbow connected* merupakan *strong rainbow connection number* pada graf G dan dinotasikan dengan $src(G)$.

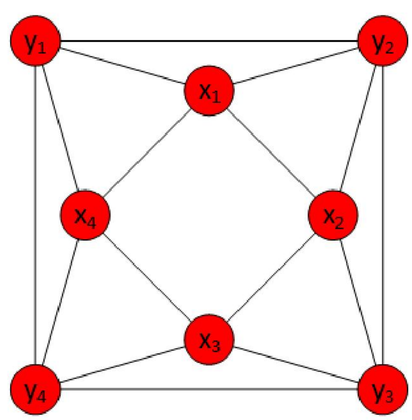
Menurut Chartrand dkk [2], jika G adalah graf terhubung tak trivial dengan *size* m yang diameternya adalah $diam(G)$, maka

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m \tag{1}$$

Chartrand dkk [1] melakukan penelitian *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada beberapa jenis graf khusus seperti graf lingkaran, graf roda, graf lengkap, graf pohon, dan graf lengkap k-*partite.* Dalam tesisnya pada tahun 2015, Darmawan [3] melakukan penelitian *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada beberapa jenis graf khusus, salah satunya pada graf antiprisma (AP_n). Selain itu, Darmawan juga melakukan penelitian *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada beberapa jenis graf khusus yang dioperasikan menggunakan operasi graf, salah satunya adalah operasi *shackle.*

TINJAUAN PUSTAKA

Graf antiprisma dinotasikan dengan AP_n adalah graf dengan himpunan titik $V(AP_n) = \{x_i, y_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(AP_n) = \{x_i x_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_i y_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_n y_1\} \cup \{x_i y_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_{i+1} \, | 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_n y_1\}$. Berikut adalah gambar graf antiprisma AP_4.

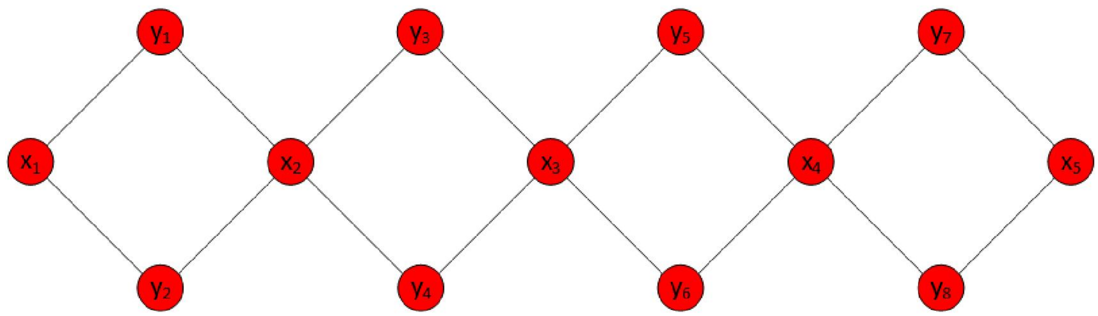


Gambar 1. Graf Antiprisma $\boldsymbol{AP_4}$

Definisi. Graf *shackle* dinotasikan dengan $shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$ merupakan sebuah graf yang dibentuk dari k graf terhubung tak trivial $G_1, G_2, \dots, G_k$ sehingga untuk setiap $s, t \in [1, k]$ dengan $|s - t| \geq 2$ berlaku G_s dan G_t tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, k-1]$, G_i dan G_{i+1} tepat mempunyai satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan semua $k - 1$ titik penghubung berbeda. Jika *shackle* terbentuk dari sebanyak k graf H yang terhubung, maka *shackle* dinotasikan dengan $shack(H, k)$ [5].

HASIL DAN PEMBAHASAN

Suatu operasi graf *shackle* dari t graf antiprisma $AP_{(4)1}, AP_{(4)2}, \dots, AP_{(4)t}$ dinotasikan dengan $Shack(AP_4, t)$. Misal $G \cong Shack(AP_4, t)$. Graf G memiliki himpunan titik $V(G) = \{w_i, x_{j,k}, y_{j,k}, z_l | 1 \le i \le t+1, 1 \le j \le t, 1 \le k \le 2, 1 \le l \le 2t\}$ dengan $|V(G)| = 7t + 1$ dan himpunan sisi $E(G) = \{x_{i,j}x_{i,j+1} | 1 \le i \le t, j = 1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \le i \le t, j = 1\} \cup \{x_{i,j}y_{i,j} | 1 \le i \le t, 1 \le j \le 2\} \cup \{w_i z_{2i-1} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_i z_{2i} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_{i+1} z_{2i} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_{i+1} z_{2i-1} | 1 \le i \le t\} \cup \{x_{i,j} w_i | 1 \le i \le t, j = 1\} \cup \{x_{i,j} w_{i+1} | 1 \le i \le t, j = 2\} \cup \{x_{i,j} z_{2i-1} | 1 \le i \le t, 1 \le j \le 2\} \cup \{y_{i,j} w_i | 1 \le i \le t, j1\} \cup \{y_{i,j} w_{i+1} | 1 \le i \le t, j = 2\} \cup \{y_{i,j} z_{2i} | 1 \le i \le t, 1 \le j \le 2\}$ dengan $|E(G)| = 16t$. Gambar 2 merupakan graf hasil operasi *Shackle* $\boldsymbol{C_4}$.



Gambar 2. Graf Hasil Operasi *Shackle* $\boldsymbol{C_4}$

Teorema 3.1. *Misal t bilangan bulat positif dengan $t \ge 2$ dan $G \cong Shack(AP_4, t)$. Maka $rc(G) = 2t$.*

Bukti.

Misal G adalah $Shack(AP_4, t)$ yang memiliki himpunan titik

$$V(G) = \{w_i, x_{j,k}, y_{j,k}, z_l | 1 \le i \le t+1, 1 \le j \le t, 1 \le k \le 2, 1 \le l \le 2t\}$$

dengan $|V(G)| = 7t + 1$ dan himpunan titik $E(G) = \{x_{i,j}x_{i,j+1} | 1 \le i \le t, j = 1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \le i \le t, j = 1\} \cup \{x_{i,j}y_{i,j} | 1 \le i \le t, 1 \le j \le 2\} \cup \{w_i z_{2i-1} | 1 \le i \le n\} \cup \{w_i z_{2i} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_{i+1} z_{2i} | 1 \le i \le t\} \cup \{w_{i+1} z_{2i-1} | 1 \le i \le t\} \cup \{x_{i,j} w_i | 1 \le i \le t, j = 1\} \cup \{x_{i,j} w_{i+1} | 1 \le i \le t, j = 2\} \cup \{x_{i,j} z_{2i-1} | 1 \le i \le t, 1 \le j \le 2\} \cup \{y_{i,j} v_i | 1 \le i \le t, j = 1\} \cup \{y_{i,j} w_{i+1} | 1 \le i \le t, j = 2\} \cup \{y_{i,j} z_{2i} | 1 \le i \le t, 1 \le j \le 2\}$ dengan $|E(G)| = 16t$. Graf G memiliki $diam(G) = 2t$.

Berdasarkan pertidaksamaan (1) maka

$$diam(G) \le rc(G) \le m$$

$$2t \le rc(G) \le 16t$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $rc(G) = 2t$ yang dibagi ke dalam dua kasus.

(i) Akan ditunjukkan $rc(G) \le 2t$

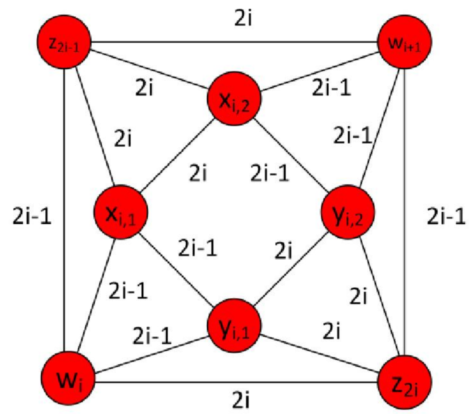
Didefinisikan pewarnaan sisi c sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} 2i-1 & e = x_{i,j}y_{i,j}; & 1 \le i \le t; 1 \le j \le 2 \\ & e = x_{i,j}w_i;\ e = y_{i,j}w_i; & 1 \le i \le t; j = 1 \\ & e = x_{i,j}w_{i+1};\ e = y_{i,j}w_{i+1}; & 1 \le i \le t; j = 2 \\ & e = w_i z_{2i-1};\ e = w_{i+1}z_{2i}; & 1 \le i \le t \\ 2i & e = y_{i,j}z_{2i};\ e = x_{i,j}z_{2i-1}; & 1 \le i \le t; 1 \le j \le 2 \\ & e = x_{i,j}x_{i,j+1};\ e = y_{i,j}y_{i,j+1}; & 1 \le i \le t; j = 1 \\ & e = w_i z_{2i};\ e = w_{i+1}z_{2i-1}; & 1 \le i \le t \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut, diperoleh bahwa $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, 2t\}$ sehingga $rc(G) \le 2t$.

(ii) Akan ditunjukkan $rc(G) \ge 2t$
Graf G memiliki $diam(G) = 2t$. Berdasarkan pertidaksamaan (1) maka $2t \le rc(G)$ sehingga terbukti bahwa $rc(G) \ge 2t$.

Berdasarkan (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $rc(G) = 2t$. □



Gambar 3. Pewarnaan *Rainbow* pada Komponen ke-i *Shackle* Graf Antiprisma AP_4

Teorema 3.2. *Misal t bilangan bulat positif dengan $t \ge 2$ dan $G \cong Shack(AP_4, t)$. Maka $rc(G) = src(G) = 2t$.*

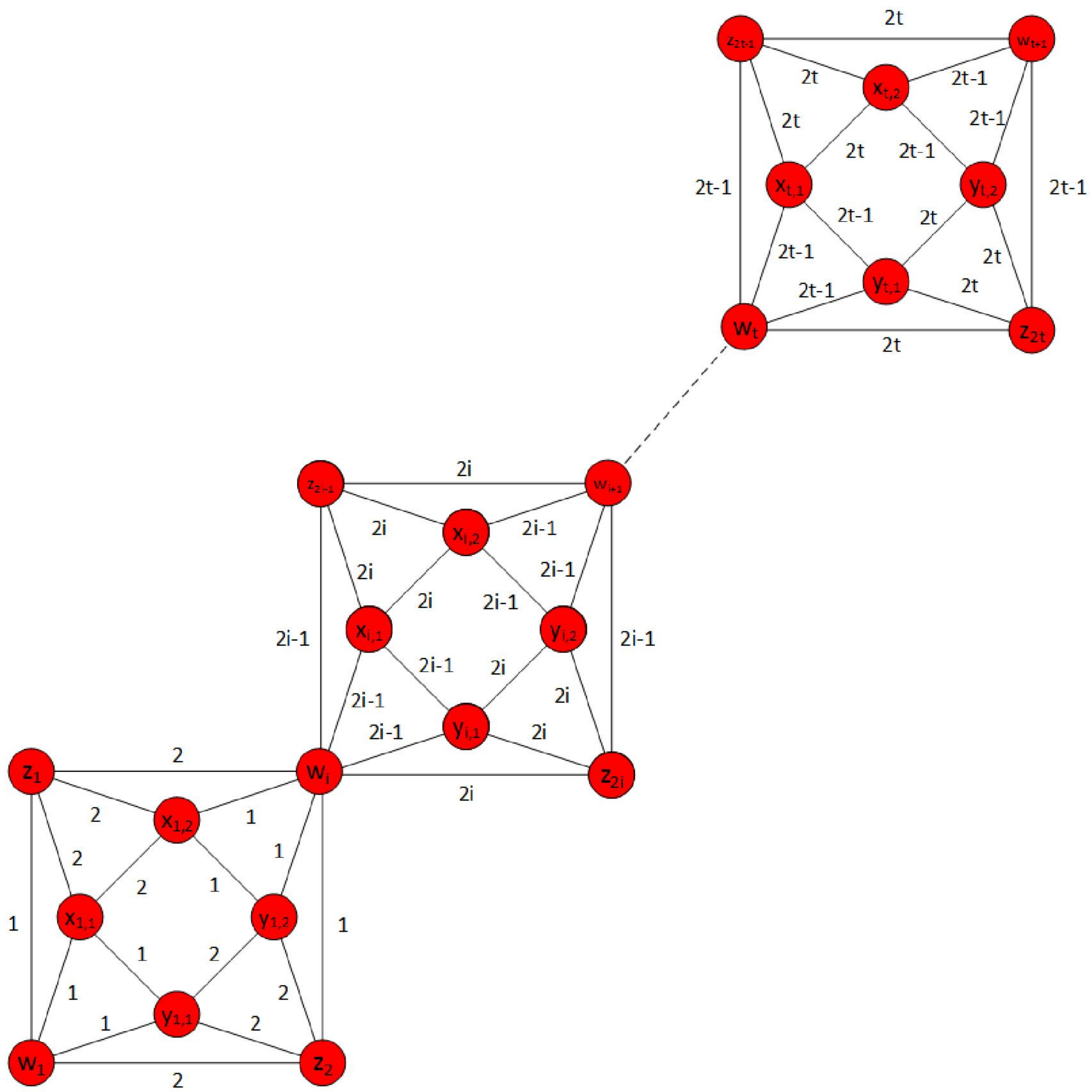
Bukti.

Misal $G \cong Shack(AP_4, t)$. Berdasarkan pertidaksamaan (1), nilai $rc(G) \le src(G)$. Telah ditunjukkan bahwa nilai $rc(G) = 2t$. Dengan mendefinisikan pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, 2t\}$, akan dibuktikan bahwa $2t \le src(G)$.

$$c(e) = \begin{cases} 2i-1 & e = x_{i,j}y_{i,j}; & 1 \le i \le t; 1 \le j \le 2 \\ & e = x_{i,j}w_i;\ e = y_{i,j}w_i; & 1 \le i \le t; j = 1 \\ & e = x_{i,j}w_{i+1};\ e = y_{i,j}w_{i+1}; & 1 \le i \le t; j = 2 \\ & e = w_i z_{2i-1};\ e = w_{i+1}z_{2i}; & 1 \le i \le t \\ 2i & e = y_{i,j}z_{2i};\ e = x_{i,j}z_{2i-1}; & 1 \le i \le t; 1 \le j \le 2 \\ & e = x_{i,j}x_{i,j+1};\ e = y_{i,j}y_{i,j+1}; & 1 \le i \le t; j = 1 \\ & e = w_i z_{2i};\ e = w_{i+1}z_{2i-1}; & 1 \le i \le t \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut, maka jelaslah bahwa $src(G) \le 2t$.

Setiap titik pada graf antiprisma AP_4 seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic* dengan $diam(AP_4) = 2$, misal $d(w_1, w_2) = d(z_1, z_2) = d(w_1, x_{1,2}) = d(w_1, y_{1,2}) = d(w_2, x_{1,1}) = d(w_2, y_{1,1}) = d(z_1, y_{1,1}) = d(z_1, y_{1,2}) = d(z_2, x_{1,1}) = d(x_{1,1}, y_{1,2}) = d(x_{1,2}, y_{1,1}) = 2$. Hal ini juga berlaku untuk seluruh titik pada graf G, sehingga setiap lintasan *geodesic* sudah diwarnai dengan pewarnaan-$2t$ *strong rainbow* berdasarkan pendefinisian pewarnaan-$2t$ *rainbow*. Jadi $src(G) = rc(G) = 2t$.



Gambar 4. Pewarnaan-2t *Rainbow* pada *Shackle* Graf Antiprisma $\boldsymbol{AP_4}$

KESIMPULAN

Teorema *Misal* t *bilangan bulat positif dengan* $t \geq 2$ *dan* $G \cong Shack(AP_4, t)$. *Maka* $rc(G) = src(G) = 2t$.

REFERENSI

[1] Chartrand, G., & dkk. 1993. *Applied and Algoritmic Graph Theory.* New York: Mac Graw-Hill, Inc.

[2] Chartrand, G., & dkk. 2008. Rainbow Connection in Graphs. *Math Bohem* 133(1), hal. 85-98.

[3] Darmawan, R. N. 2015. *Analisis Rainbow Connection Number pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya. Tesis.* Universitas Jember.

ISSN 1978-8568
9 771978 856876