Jurnal "LOG!K@" , Jilid 7, No. 2, 2017, Hal. 146 - 151
ISSN 1978 – 8568

GRUP TERURUT PARSIAL PADA MATRIKS SIMETRI BERUKURAN 2×2

Irmatul Hasanah
Universitas Islam Negeri Sultan Maulana Hasanuddin Banten
Email: irmatul.hasanah@uinbanten.ac.id

Abstract: This paper deals with the partially ordered group of the 2×2 symmetric matrix. We show that there are two partially ordered group of the 2×2 symmetric matrix. We define a matrix to be positive when each entry of the matrix is positive. With the characterization of the 2×2 symmetric matrix, we construct the cone positive thus 2×2 symmetric matrix is partially ordered group.
Keywords: *symmetric matrix, group-ordered, cone positive.*

Abstrak: Artikel ini membahas grup terurut parsial pada matriks simetri berukuran 2×2. Akan ditunjukkan bahwa terdapat dua grup terurut parsial dari matriks simetri berukuran 2×2. Suatu matriks dikatakan positif jika setiap entri pada matriks bernilai positif. Melalui karakteristik dari matriks simetri, akan dikonstruksi sebuah positif cone sehingga matriks simetri berukuran 2×2 merupakan grup terurut parsial.
Kata kunci: matriks simetri, grup terurut, positif cone.

I. PENDAHULUAN

Himpunan matriks atas berukuran 2×2 atas himpunan bilangan real $\mathbb{R}$,

$$M_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}\right\}$$

merupakan grup dengan operasi penjumlahan matriks. Melalui urutan $A\le B$ yang didefinisikan dengan $a_i\le b_i$ untuk setiap $i=1,2,3$, himpunan matriks $M_2(\mathbb{R})$ merupakan grup terurut parsial. Grup terurut parsial dapat didefinisikan melalui cone positif. Dengan mendefinisikan cone positif P dari $M_2(\mathbb{R})$, himpunan $M_2(\mathbb{R})$ membentuk grup terurut parsial dengan cone positif P. Selanjutnya, himpunan matriks simetri berukuran 2×2 atas $\mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$S_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a,b,d\in\mathbb{R}\right\}$$

juga membentuk grup dengan operasi penjumlahan matriks. Sembarang dua matriks A dan B pada $S_2(\mathbb{R})$, $A\le B$ jika dan hanya jika $<x,(B-A)x>=x^T(B-A)x\ge 0$ untuk setiap $x\in\mathbb{R}^2$ [1]. Melalui urutan yang didefinisikan tersebut, matriks simetri $S_2(\mathbb{R})$ bersama dengan cone positif

$$P=\left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}\in S_2\left(\mathbb{R}\right) \mid < x, Ax > \geq 0, \forall x\in\mathbb{R}^2\right\}$$

membentuk grup terurut parsial.

LANDASAN TEORI

Suatu himpunan tak kosong G bersama dengan operasi $*$ membentuk grup jika memenuhi:
(1) Sifat ketertutupan, yaitu untuk setiap $a,b\in G$ berlaku $a*b\in G$.
(2) Sifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a,b,c\in G$ berlaku $(a*b)*c=a*(b*c)$.
(3) Memiliki unsur identitas, yaitu terdapat $e\in G$ yang memenuhi $a*e=e*a=a$ untuk setiap $a\in G$.
(4) Untuk setiap $a\in G$ terdapat $a^{-1}\in G$ yang memenuhi $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.[2]

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ membentuk grup dengan operasi penjumlahan. Sedangkan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi perkalian tidak membentuk grup, sebab terdapat bilangan nol yang tidak memiliki invers perkalian di. $\mathbb{R}$.

Suatu relasi biner “$\sim$” antara dua unsur a dan b pada sebuah himpunan tak kosong A didefinisikan dengan a berelasi dengan b jika (a,b) merupakan unsur pada hasilkali kartesian $A\times A$. Salah satu contohnya relasi lebih kecil dari atau sama dengan “$\leq$” pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Bilangan x dikatakan lebih kecil dari atau sama dengan y jika (x,y) unsur pada $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Relasi biner “$\leq$” pada himpunan tak kosong P dikatakan urutan parsial jika untuk setiap x,y,z berlaku:
(1) $x\leq x$ (sifat refleksif);
(2) Jika $x\leq y$ dan $y\leq x$ maka $x=y$ (sifat antisimetris);
(3) Jika $x\leq y$ dan $y\leq z$ maka $x\leq z$ (sifat transitif).

Pasangan $(P,\leq)$ disebut himpunan terurut parsial dan selanjutnya ditulis P . Lebih lanjut, himpunan terurut parsial P dikatakan terurut total jika untuk setiap $x,y\in P$ memenuhi $x\leq y$ atau $y\leq x$ [2].

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan urutan lebih kecil dari atau sama dengan “$\leq$” merupakan himpunan terurut parsial. Lebih lanjut merupakan himpunan terurut total sebab setiap dua unsur pada bilangan real x dan y selalu dapat diurutkan yaitu $x\leq y$ atau $y\leq x$. Hasilkali kartesian dari himpunan $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$$

merupakan urutan parsial dengan urutan yang didefinisikan dengan

$$(x_1,y_1)\leq(x_2,y_2) \text{ jika dan hanya jika } x_1\leq x_2 \text{ dan } y_1\leq y_2 .$$

Himpunan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ bukan merupakan himpunan terurut total, sebab terdapat $(1,4)$ dan $(2,3)$ pada $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tetapi tidak berlaku baik $(1,4)\leq(2,3)$ maupun $(2,3)\leq(1,4)$.

Hasilkali Dalam

Misalkan $x,y\in\mathbb{R}^n$. Hasilkali dalam standar dari x,y, yaitu

$$\begin{aligned} <.\,,\,.>:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x,y) &\mapsto y^T x \end{aligned}$$

dengan y^T merupakan transpos dari y. Untuk setiap $x,y,z\in\mathbb{R}^n$ dan skalar $\alpha\in\mathbb{R}$ memenuhi:

(1) $<x,y>=<y,x>$.

(2) $<x,x>\geq 0$ dan $<x,x>=0$ jika dan hanya jika $x=0$.

(3) $<x+y,z>=<x,z>+<y,z>$.

(4) $<\alpha x,y>=\alpha<x,y>$.[4]

Himpunan matriks simetri berukuran 2×2 atas $\mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$S_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d\end{pmatrix} \mid a,b,d\in\mathbb{R}\right\}$$

Hasilkali dalam dari matriks $A\in S_2(\mathbb{R})$, yaitu

$$<Ax,x>=x^T Ax$$

Karena matriks simetri A memiliki sifat $A=A^T$, maka diperoleh

$$<x,Ax>=(Ax)^T x=x^T A^T x=x^T Ax=<Ax,x>$$

Selanjutnya, berikut ini teorema yang memberikan karakteristik dari suatu matriks simetri.

Teorema 1.
Misalkan $A\in S_n(\mathbb{R}^n)$ matriks simetri, maka hasilkali dalam $<Ax,x>=x^T Ax$ bilangan real untuk setiap $x\in\mathbb{R}^n$ [4].

Grup Terurut Parsial

Himpunan terurut parsial G yang juga merupakan suatu grup dikatakan grup terurut parsial jika. $x\leq y$ maka $a+x\leq a+y$ dan $x+a\leq y+a$ untuk setiap $x,y\in G$ dan $a\in R$ [5]. Menurut definisi tersebut, dapat dikatakan bahwa operasi urutan pada G mempertahankan operasi penjumlahan.

Himpunan semua unsur positif pada grup terurut parsial G disebut cone positif dari G, yaitu $G^{+} = \{\mathrm{g} \in \mathrm{G} | \mathrm{g} \geq 0\}$ dan $-G^{+} = \{g \in G | -g \in G\}$. Melalui cone positif, sembarang grup dapat dikonstruksi menjadi grup terurut parsial.

Teorema 2.
Misalkan G grup. Jika himpunan $P \subseteq G$ memenuhi:
(1) Untuk setiap $a, b \in P$ berlaku $a + b \in P$,
(2) $P \cap (-P) = \{0\}$.
Maka G dapat dibangun sebagai grup terurut parsial dengan urutan parsial pada G sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in G$,

$$a \leq b \text{ jika dan hanya jika } b - a \in P$$

Lebih lanjut, P merupakan cone positif dari G. Grup G menjadi grup terurut parsial dengan cone positif P selanjutnya dinotasikan dengan (G, P) [5].

HASIL DAN PEMBAHASAN

Himpunan matriks simetri berukuran 2×2 atas $\mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$S_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} | \, a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Membentuk grup dengan operasi penjumlahan matriks.

Lemma 1
Misalkan subhimpunan P_0 dari $S_2(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$P_0 = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) | \, a, b, d \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Himpunan $S_2(\mathbb{R})$ bersama dengan P_0 membentuk urutan parsial dengan urutan

$$A \leq B \text{ jika dan hanya jika } B - A \in P_0.$$

Bukti:
Akan ditunjukkan himpunan $S_2(\mathbb{R})$ bersama dengan P_0 membentuk urutan parsial.

1. Ambil sembarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$ di P, maka $A, B \in S_2(\mathbb{R})$ dengan $a_1, b_1, d_1 \geq 0$ dan $a_2, b_2, d_2 \geq 0$. Perhatikan bahwa

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in P_0$$

2. Ambil sembarang $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in P_0 \cap -P_0$, artinya $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in P_0$ dan $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in -P_0$ sehingga $-A=-\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a & -b \\ -b & -d \end{bmatrix} \in P_0$. Karena $a,b,d \in \mathbb{R}$ dan $a,b,d \geq 0$ maka $-a,-b,-d \leq 0$. Jadi haruslah $a=b=d=0$.

Berdasarkan uraian di atas, menurut Teorema 1, himpunan matriks simetri $S_2(\mathbb{R})$ dapat dibangun sebagai grup terurut parsial dengan urutan parsial pada $S_2(\mathbb{R})$ sebagai berikut: untuk setiap $A,B \in S_2(\mathbb{R})$,

$$A \leq B \text{ jika dan hanya jika } B-A \in P_0$$

Lebih lanjut, P_0 merupakan cone positif dari $S_2(\mathbb{R})$. Grup $S_2(\mathbb{R})$ menjadi grup terurut parsial dengan cone positif P dan ditulis $(S_2(\mathbb{R}), P_0)$.

Lemma 2
Misalkan subhimpunan P dari $S_2(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$P_1=\left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \mid < x, Ax > \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Himpunan $S_2(\mathbb{R})$ bersama dengan P_1 membentuk urutan parsial dengan urutan

$$A \leq B \text{ jika dan hanya jika } B-A \in P_1.$$

Bukti:
Akan ditunjukkan himpunan $S_2(\mathbb{R})$ bersama dengan P membentuk urutan parsial.

1. Ambil sembarang $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$ di P, maka $A,B \in S_2(\mathbb{R})$ dengan $< x, Ax > \geq 0$ dan $< x, Bx > \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$.
   a. Penjumlahan dua unsur A dan B merupakan unsur di $S_2(\mathbb{R})$, $A+B \in S_2(\mathbb{R})$, sebab $S_2(\mathbb{R})$ grup.
   b. Dengan sifat hasilkali dalam, diperoleh

$$\begin{aligned} < x,(A+B)x > &= < (A+B)x, x > \\ &= < Ax, x > + < Bx, x > \\ &= < x, Ax > + < x, Bx > \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

   Jadi, $A+B \in P_1$.

2. Misalkan $A \in P_1 \cap -P_1$, maka $A \in P_1$ dan $A \in -P_1$. Sehingga $< x, Ax > \geq 0$ dan $< x, Ax > \leq 0$. Karena $< x, Ax > = x^T Ax$ berupa bilangan real, maka $< x, Ax > = 0$ dan $x \in \mathbb{R}^2$ tak nol, maka $A = 0$.

Berdasarkan uraian di atas, menurut Teorema 1, himpunan matriks simetri $S_2(\mathbb{R})$ dapat dibangun sebagai grup terurut parsial dengan urutan parsial pada $S_2(\mathbb{R})$ sebagai berikut: untuk setiap $A, B \in S_2(\mathbb{R})$,

$$A \leq B \text{ jika dan hanya jika } B - A \in P_1.$$

Lebih lanjut, P_1 merupakan cone positif dari $S_2(\mathbb{R})$. Grup $S_2(\mathbb{R})$ menjadi grup terurut parsial dengan cone positif P_1 dan ditulis $(S_2(\mathbb{R}), P_1)$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada pembahasan di atas, telah ditunjukkan bahwa terdapat dua urutan grup yang berbeda dari matriks simetri $S_2(\mathbb{R})$. Dua urutan tersebut didefinisikan melalui cone positif P_0 dan P_1.

Dalam artikel ini, penulis hanya meneliti matriks simetri berukuran 2×2. Sehingga penulis mengharapkan kepada pembaca untuk meneliti matriks simetri berukuran $n \times n$ dengan $n \geq 3$. Penulis juga mengharapak kepada pembaca untuk mencari cone positif yang lain sehingga dengan cone positif tersebut, himpunan matriks simetri berukuran 2×2, $S_2(\mathbb{R})$, membentuk grup terurut parsial.

REFERENSI

[1] Bhatia, R.. 1997. *Matrix Analysis*. New York: Springer.

[2] Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Willey & Sons, Inc.

[3] Horn, R.A. dan Johnson, C.R. 1990. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press

[4] Howard, A. dan Rorres, C. 2005. *Elementary Linear Algebra, Ninth Edition*. New York: John Willey & Sons, Inc.

[5] Ma J., *Lecture Notes On Algebraic Structure Of Lattice-Ordered Rings*, World Scientific, 2014.

[6] Ma J. and W. Bradley, Lattice-ordered 2×2 triangular matrix algebras, *Linear Algebra Appl*. 404 (2005), 262-274.

[7] MacCluer, B. D. 2009. *Elementary Functional Analysis*. New York: Springer.